## CHAPITRE II

## FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

### 1) Généralités :

**Définition** *On appelle fonction numérique d'une variable réelle toute application f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

*D est appelé domaine de définition de f.*

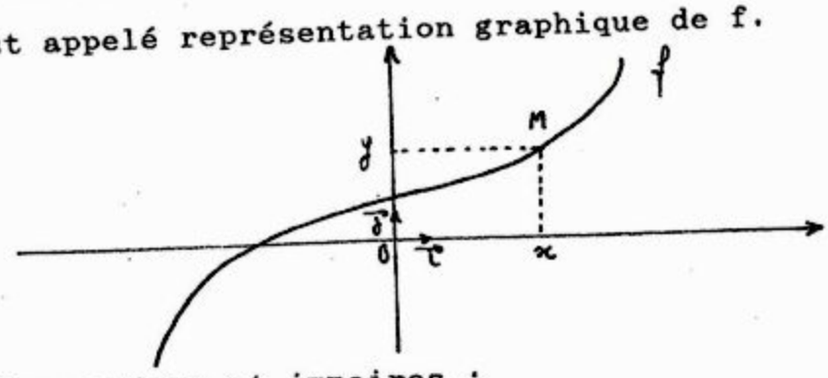
**Exemple** : $f(x) = \log(1+x^2)$ , $D = \mathbb{R}$

$g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$ , $D = \mathbb{R}_+^*$ .

On appelle graphe de f l'ensemble :

$$G(f)=\{(x,f(x))/\ x \in D\} \ , \quad G(f)\subset D\times\mathbb{R}.$$

Dans le plan euclidien P rapporté à un repère cartésien $(o,\vec{i},\vec{j})$, on représente chaque élément $(x,f(x)$ de $G(f)$ par un point M de coordonnés x et $y = f(x)$ , $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. l'ensemble de ces points est appelé représentation graphique de f.




### a) Fonctions paires et impaires :

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à l'origine 0, c'est-à-dire $x \in D$ implique $-x \in D$. Exemple:

$D = ]-\infty,+\infty[$ , $D = [-1,1]$.



ETUSUP .com

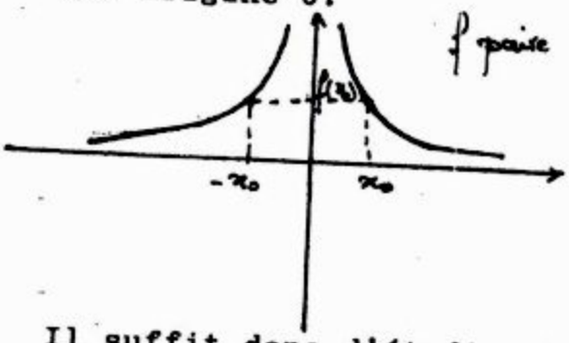
Une fonction $f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite paire si $\forall x \in D$, $f(-x)=f(x)$.

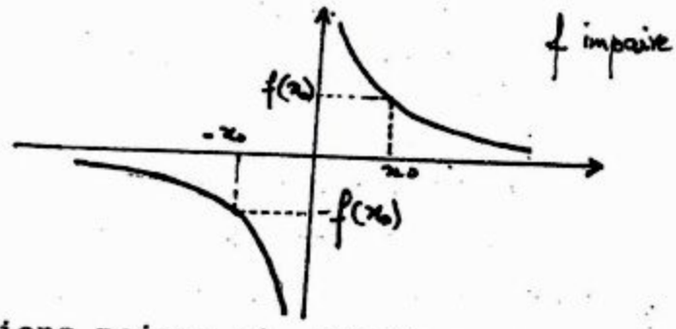
f est dite impaire si $\forall x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

<u>Exemples</u> : $f(x)=\cos x$ et $g(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ sont paires sur $\mathbb{R}$.

$f(x)= \sin x$ et $g(x) = \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ sont impaires sur leurs domaines de définitions.

Si f est paire, les points $M(x_0, f(x_0))$ et $M'(-x_0, f(-x_0))$ sont symétriques par rapport à l'axe Oy. De même si f est impaires les points $M(x_0, f(-x_0))$ et $M'(-x_0, f(-x_0))$ sont symétriques par rapport à l'origine O.




Il suffit donc d'étudier les fonctions paires et impaires sur $D \cap \mathbb{R}^+$ et d'en déduire le reste sur $D \cap \mathbb{R}^-$ par symétrie par rapport à l'axe Oy ou l'origine, selon que f est paire ou impaire.

b) <u>Fonctions périodiques</u> :

Une fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite périodique s'il existe un nombre $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (*) . Le plus petit des nombre $T > 0$ vérifiant l'égalité (*) (lorsqu'il existe) est appelé période de f.

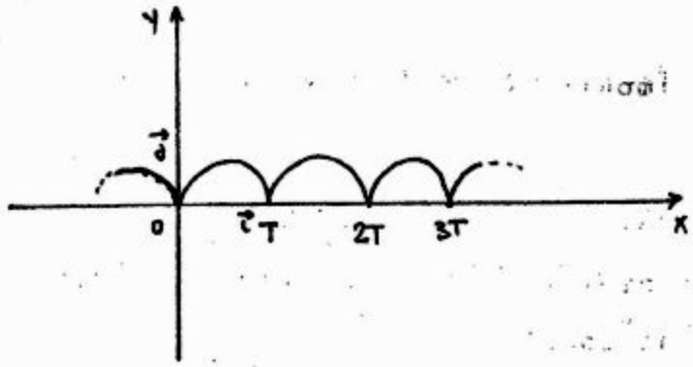
<u>Exemples</u> : . $f(x) = \cos x$ est une fonction périodique de période $T= 2\pi$ .

$f(x) = \operatorname{tg} x$ est périodique sur son domaine de définition, de période $T = \pi$ .



ETUSUP .com

si f est périodique de période T, on l'étudie sur un intervalle de longueur T, par exemple [0,T].




<u>Exercice</u> :

1) si $f(x+T) = f(x)$, alors $f(x+nT) = f(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$..

2) On considère $f(x) = x-E(x)$. Montrer que f est périodique de période T = 1. Donner la représentation graphique de f.
E(x) désigne la partie entière de x. (Par définition $E(x)= k$ si $x \in [k,k+1[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ).

c) <u>Fonctions monotones</u> :

soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$. f est dite monotone croissante sur D si :

$\forall x,y \in D$: $x \leq y$ entraine $f(x) \leq f(y)$.

f est dite monotone décroissante sur D si:

$\forall x,y \in D$: $x \leq y$ entraine $f(x) \geq f(y)$.

si les inégalités sont strictes, on dit que f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

<u>Exemples</u> :

. $f(x) = \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ :$x<y$ entraine $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ .

$g(x) = \frac{1}{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ ,



ETUSUP .com

d) <u>Fonctions bornées</u> :

Soit $f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$f(D) = \{ f(x) \ / \ x \in D \} \subset \mathbb{R}$ .

f est dite majorée sur D si l'ensemble f(D) est majoré, c'est-à-dire il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M \ \forall \ x \in D$. f est dite minorée sur D si l'ensemble f(D) est minorée, c'est-à-dire il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m \ \forall \ x \in D$. f est bornée si l'ensemble f(D) est borné, c'est-à-dire $\exists \ M \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq M \ \forall \ x \in D$.

<u>Exemple:</u> 1) $f(x) = \sin x$ est bornée sur $\mathbb{R}$ car:

$$| f(x) | \leq 1 \quad \forall \ x \in \mathbb{R} .$$

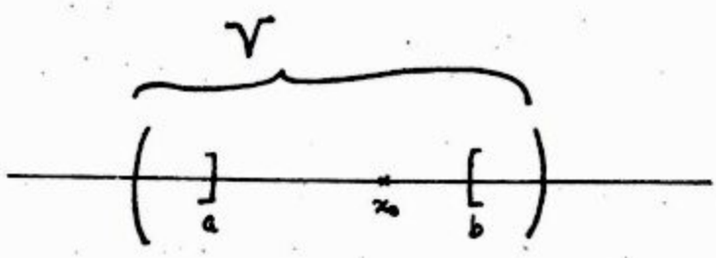
2) $g(x) = x^2 + x + 1$ est bornée sur $[0,1[$ car :

$$|g(x)| = |x^2+x+1| \leq 1+1+1 = 3 \quad \forall \ x \in [0,1[.$$

Par contre g(x) n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

2) <u>Limite d'une fonction</u> :

On va définir d'abord la notion de voisinage d'un point de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Un ensemble $V \subset \mathbb{R}$ est dit un voisinage de $x_0$ s'il existe $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ tels que $x_0 \in ] a,b [ \subset V$




Par exemple $V = [0,1]$ est un voisinage de $x_0 = \frac{1}{2}$ .Il suffit de prendre $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{2}{3}$ . On a:

$$\frac{1}{2} \in ] \frac{1}{4} , \frac{2}{3} [ \subset [ 0,1 ] .$$

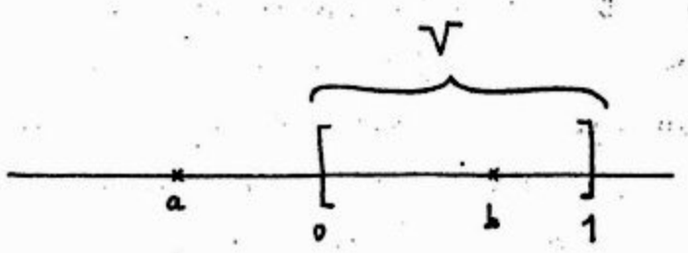
De même $V = [0,1]$ est un voisinage de $\frac{1}{3}$ . (donner a et b qui



ETUSUP .com

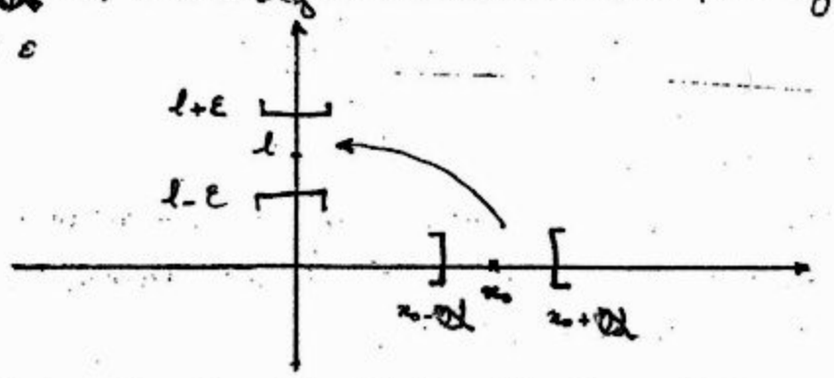
conviennent).

Par contre $V = [0,1]$ n'est pas un voisinage de 1, car on ne peut pas trouver $a,b \in \mathbb{R}$ , $a < b$ tel que $1 \in ]a,b[ \subset [0,1]$ !




<u>Définition</u> : *Soit $f$ une fonction définie dans un voisinage $V$ de $x_0$, sauf peut être en $x_0$. On dit que $f$ admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite lorsque $x$ tend vers $x_0$ (on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$) si :*

*$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in D_f$, la condition : $|x - x_0| < \alpha$ entraine $|f(x)-l| < \varepsilon$*




<u>Exemple</u> : $f(x) = 3x - 4$ ; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$. En effet, soit $\varepsilon > 0$,.
Cherchons $\alpha > 0$ tel que la condition $|x-1| < \alpha$ entraine $|f(x)+1| < \varepsilon$ .

$|f(x)+1| = |3x-4+1| = 3|x-1| < \varepsilon$ dès que $|x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$ . On prend $\alpha = \frac{\varepsilon}{3}$ par exemple. Remarquons que tout nombre $\alpha > 0$ tel que $0 < \alpha \leq \frac{\varepsilon}{3}$ convient.

<u>Proposition</u> : *Si $f$ admet une limite au point $x_0$, alors cette limite est unique.*



ETUSUP .com

**Démonstration** : On suppose que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l'$.

Montrons que $l = l'$

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre quelconque. Ils existent $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$ tels que : $o < |x-x_0| < \eta_1$ entraine $|f(x)-l| < \frac{\varepsilon}{2}$

et $o < |x-x_0| < \eta_2$ entraine $|f(x)-l'| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour tout x vérifiant $o < |x-x_0| < \eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$, on a:

$|l-l'| \leq |f(x)-l| + |f(x)-l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$|l-l'| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, donc $l-l' = 0$, c'est-à-dire $l = l'$.

**Définition** : **(limite à droite et à gauche)**

*Soit $f$ une fonction définie dans un voisinage de $x_0$. on dit que $f$ admet une limite $l$ à droite au point $x_0$ si :*

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x$: $x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$.

*$f$ admet une limite $l$ à gauche au point $x_0$ si:*

$\forall \varepsilon >$, $\exists \eta > 0$, $\forall x$ : $x_0 - \eta < x < x_0 \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$.

**Notation** : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ ; $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

**Exemple** :

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \; ; \; \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$$

On voit que la limite à gauche en 0 est différente de la limite à droite en ce point .



ETUSUP .com

**Proposition** : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l$

**Démonstration** : A faire à titre d'exercice .

La fonction f de l'exemple ci-dessus n'admet pas limite en 0, car $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ .

**Proposition** : *( Opérations sur les limites )*

*Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage de $x_0$. On suppose que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$. Alors :*

*i)* $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

*ii)* $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x)).\ (\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$.

*iii)* $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$

*iv) si* $l' \neq 0$ , $\lim (\frac{f}{g})(x) = \frac{l}{l'}$.

*v) si* $f \leq g$, *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

**Définitions (limites infinies)** :

*Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Par définition:*

· $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *si* $\forall A > 0$ , $\exists\ \eta > 0$ *tel que* $0<|x-x_0|<\eta$ *entraine* $f(x) > A$.

· $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ *si* $\forall A>0$ , $\exists\ \eta > 0$ *tel que* $0<|x-x_0|<\eta$ *entraine* $f(x)<-A$.

· $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ $(l\in\mathbb{R})$ si $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ A > 0 tel que x > A entraine $|f(x)-l| < \varepsilon$ .

· $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ $(l \in \mathbb{R})$ si $\forall\ \varepsilon > 0$ , $\exists$ A > 0 tel que x < -A



ETUSUP .com

entraine $|f(x)-l| < \varepsilon$ .

**Exercice** : Donner la définition des limites suivantes:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ .

Le théorème suivant va nous permettre de donner le lien entre les limites sur les suites et les limites sur les fonctions:

**Théorème** : *Soient $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in [a,b]$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

*i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.*

*ii) Quelle que soit la suite $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in [a,b]$, $x_n \neq x_0$ , si $x_n \to x_0$ alors $f(x_n) \xrightarrow[n]{} l$*

**Remarque** : Pour montrer que la limite d'une fonction f n'existe pas en un point $x_0$, il suffit donc de trouver une suite $(x_n)_n$ qui converge vers $x_0$ telle que $(f(x_n))_n$ est divergente.

**Exercice** : Montrer que $\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$ n'existe pas (considérer pour cela la suite $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ ).

3) **Fonctions équivalentes** :

Deux fonctions f et g sont dites équivalentes quand x tend vers $x_0$ s'il existe une fonction h définie dans un voisinage V de $x_0$ telle que:

$f(x) = g(x)\, h(x) \quad \forall\, x \in V$ et $\lim_{x\to x_0} h(x) = 1$

On écrit alors $f \sim g \ (x_0)$ , ou bien $f \underset{(x_0)}{\sim} g$.



ETUSUP .com

Si $g \neq 0$ dans un voisinage de $x_0$, sauf peut être en $x_0$, la définition précédente est équivalente à $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

<u>Exemples</u> :

a) $\sin x \sim x \quad (0)$

b) $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \sim a_n x^n \quad (\pm\infty)$, $a_n \neq 0$.

$2x^8 + x^7 + 1 \sim 2x^8 \quad (\pm\infty)$

<u>Proposition</u> : *La relation $f \sim g \ (x_0)$ est une relation d'équivalence. (c'est-à-dire réflixive, symétrique et transitive).*

<u>Exercice</u>:Montrer que si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$, avec $l \neq 0$, alors $f \underset{(x_0)}{\sim} l$.

<u>Proposition</u>: *Si $f \sim g \ (x_0)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$.*

Par suite , pour chercher la limite d'une fonction f, on peut remplacer f par une fonction équivalente.

<u>Proposition</u> : *Si $f \underset{(x_0)}{\sim} f_1$ et $g \underset{(x_0)}{\sim} g_1$ , alors $fg \underset{(x_0)}{\sim} f_1 g_1$ et $\frac{f}{g} \underset{(x_0)}{\sim} \frac{f_1}{g_1}$*

<u>Exemples</u> : 1) $\operatorname{tg} x \underset{(0)}{\sim} x$ , car $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \sim \frac{x}{1} \quad (0)$

2) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad (0)$ , car $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \underset{(0)}{\sim} 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2$..



ETUSUP .com

**Remarque** : Si $f \sim f_1(x_o)$ et $g \sim g_1(x_o)$, on n'a pas en général $f+g \sim f_1 + g_1\ (x_o)$. En effet:

$$x^2 + x^3 \sim x^2 + x^4 \quad (0)$$
$$-x^2 \sim -x^2 \quad (0)$$

mais $(x^2 + x^3) - x^2 = x^3$ n'est pas éqivalente à $(x^2 + x^4) - x^2 = x^4$.

**Exercice** : En utilisant les équivalences, calculer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^{5/3} + x^{5/3}}{x^{1/3}\,\mathrm{tg}x} \quad \leq 0 .$$

4) **Partie principale d'un infinement petit** :

**Définition** : On dit que f est un infiniment petit quand x tend vers $x_o$ si $\lim_{x \to x_o} f(x) = 0$.

**Exemple** : $f(x) = \log(1+x)$ est un infiniment petit quand $x \to 0$, car $\lim_{x \to 0} \log(1+x) = \log 1 = 0$.

**Proposition** *Soit f un infiniment petit quand $x \to x_0$. Si $f \underset{(x_0)}{\sim} a(x-x_0)^n$ $(a \neq o)$, alors a et n sont déterminés de manière unique par f. $a(x-x_0)^n$ est appelée partie principale de f. f est dite un infiniment petit d'ordre n.*

**Exemple** : $f(x) = 1 - \cos x$ est un infiniment petit quand $x \to 0$ d'ordre 2. Sa partie principale est $\frac{x^2}{2}$, $1 - \cos x \underset{(o)}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

(ici $a = \frac{1}{2}$, $n=2$).

$g(x) = \log(1+x)$ est un infiniment petit quand $x \to o$ d'ordre 1. Sa partie principale est x.

$$\log(1+x) \underset{(o)}{\sim} x \quad . \quad (a = 1,\ n = 1)$$



ETUSUP .com

Puisque l'ordre de $f(x) = 1 - \cos x$ est supérieur à celui de $g(x) = \log(1+x)$ , f tend plus vite vers 0 que la fonction g (quand $x \to 0$ ).

Les formules suivantes sont à retenir :

$e^x - 1 \underset{(0)}{\sim} x$

$a^x - 1 \underset{(0)}{\sim} x \log a \, (a > 0)$

$(1+x)^\alpha - 1 \underset{(0)}{\sim} \alpha x, \ \alpha \in \mathbb{R}.$

$\alpha = \frac{1}{2} \qquad : \sqrt{1+x} - 1 \underset{(0)}{\sim} \frac{x}{2}$

$\alpha = -\frac{1}{2} \qquad : \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \underset{(0)}{\sim} -\frac{x}{2}.$



ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..